* مبرهنة :

تكون المجموعة A من الفضاء الطبولوجي (X, T) مجموعة مفتوحة إذا وفقط إذا كان جوارًا لكل نقطة من نقاطها

البرهان

لزوم الشرط

نفرض أن A مفتوحة و $x \in A$ نقطة منها عندئذٍ يكون $x \in A \subseteq A$ إذاً هي جوار

كفاية الشرط

لتأخذ نقطة كيفية $x \in A$ ولدينا من الفرض A جوار لـ x وحسب تعريف الجوار توجد مجموعة مفتوحة $U_x \in T$ بحيث أن $x \in U_x \subseteq A$ ومن هنا نجد أن $A = \cup_{x\in A}\{x\}$

$$A = \bigcup_{x\in A}\{x\} \subseteq \cup_{x\in A} U_x \subseteq A$$

وبالتالي أصبح لدينا

إذاً A هي اجتماع ~~مجموعة~~ مجموعات مفتوحة وبالتالي فإن A مفتوحة

تعريف :

لتكن $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ أسرة من جوارات النقطة x في الفضاء الطبولوجي (X, T) ونسمي الأسرة $\mathcal{U}$ جملة أساسية ~~/~~ لجوارات النقطة x إذا كان أي جوار للنقطة x يحوي أحد عناصر الأسرة $\mathcal{U}$

مثال ١ :

لو أخذنا الفضاء الطبولوجي المتري (X, d) فإن أسرة الكرات المفتوحة $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{n\in N}$ تشكل جملة أساسية للجوارات المفتوحة (جوارات النقطة x) (لأنه لو أخذنا أي جوار أنه يحوي كرة من هذه الكرات المفتوحة)

مثال ٢ :

لتأخذ الفضاء الطبولوجي المتقطع (X, T) المتقطع

كل المجموعات لهذا الفضاء هي مجموعة مفتوحة ~~.....~~

$\{\{x\}\}$ جملة أساسية (وحيدة العنصر) لأنها جوار وأي جوار آخر يحويها

Date : / / Subject:

مثال 3 : في كل المجموعات التي تحوي 1 و x

لنفرض ان $X = \mathbb{R}$ ، $\tau = \{ u \subseteq \mathbb{R} : 1 \in u \} \cup \{\emptyset\}$

$\{1, x\}$ ، $\{\{1\}\}$

هدف هذا التعريف اننا لا نأخذ جميع الجوارات فقط نأخذ بعض الجوارات الواضحة تكفي.

قاعدة الطبولوجيا:

في كثير من الأحيان يمكن معرفة جميع المجموعات المفتوحة بمعرفة جزء منها هذا الجزء يسمى عادة قاعدة أو أساس للطبولوجيا يعرف بدقة في النحو التالي:

تعريف :

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجي ، B اسرة من المجموعات المفتوحة $(B \subseteq \tau)$

نسمي الأسرة B قاعدة للطبولوجية τ أو للفضاء الطبولوجي

اذا كان اي عنصر من τ يساوي اجتماعاً لعناصر من B اذا :

نفرض لدينا الفضاء الطبولوجي المتري فيه مجموعات مفتوحة كثيرة بالفضاء المتري (X, d) أن أسرة الكرات المفتوحة تشكل قاعدة للطبولوجيا المترية لأنه " حسب مبرهنة سابقة " (اي مجموعة مفتوحة = اجتماع لكرات مفتوحة)

مثال 1: عند البرهان نأخذ مثال واحد فقط لا يكفي له

في $\mathbb{R}$ أسرة المجالات المفتوحة .

والقاعدة هي :

في $\mathbb{R}^2$ أسرة الأقراص الدائرية المفتوحة .

مثال 2 :

لنأخذ $X = \{a, b, c\}$ هذه الأسرة : طبولوجيا منقطعة القوية

$\tau = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \}$

ان الأسرة $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ تشكل قاعدة لـ τ

$\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} u_i$

والاجتماع لأسرة خالية هي مجموعة خالية

$X = \bigcap_{i \in \emptyset} u_i$

Date : / / Subject: ....

- لتجاوز هذه الصيغة يعرف بعض المؤلفين قاعدة الطبولوجيا بالقول أن B تسمى قاعدة للطبولوجيا τ اذا كانت اي مجموعة مفتوحة عن خالية تساوي أجتماعاً لعناصر من B
- وفي الحالة العامة (ضمن هذا المثال)

لنفرض X اي مجموعة و في الشمن د ح الطبولوجيا القوية عليها ان قاعدة هذه الطبولوجيا هي $B = \{\{x\}\}_{x \in X}$ اسرة المجموعات وحيدة العنصر تشكل قاعدة للطبولوجيا القوية $\{\{x\}\}_{x \in X}$ $\{\{x\}\}$

مجموعات وحيدة العنصر — اسرة المجموعات وحيدة العنصر دائماً

ملاحظة:

لنفرض أن B قاعدة للفضاء الطبولوجي (X, τ) و B^* أسرة من المجموعات المفتوحة بحيث $B \subseteq B^*$ (أي B^* تحوي B) و B^* تكون أيضاً قاعدة

نلاحظ

أذا كان لدينا قاعدة وأضفنا لها مجموعات مفتوحة ← تبقى قاعدة والحد الأقصى لإضافة المجموعات المفتوحة هو بعد المجموعات المفتوحة τ ← أي أن كل طبولوجيا هي قاعدة لنفسها

← وقد تكون للطبولوجيا الواحدة أكثر من قاعدة

برهنة:

لتكن B اسرة المجموعات المفتوحة في الفضاء الطبولوجي (X, τ) تكون الاسرة B قاعدة للطبولوجيا τ أذا وفقط أذا كانت الأسرة

$$\mathcal{V} = \{ G \in B \ ; \ x \in G \}$$

اسرة المجموعات

اذا وفقط أذا كانت هذه الأسرة تشكل جملة أساسية لجوارات النقطة x ، وذلك من أجل أي نقطة x من الفضاء.

البرهان:

لزوم الشرط:

لنفرض أن B قاعدة للفضاء.

ولنأخذ النقطة x ونأخذ جواراً كيفياً للنقطة x وليكن G جوار لـ $x \in X$

دائماً X , ϕ دوماً موجودتان بلا في العلاقة مع

Date : / / Subject:

حسب تعريف الجوار ، توجد مجموعة مفتوحة $u \in \tau$ بحيث أن $x \in u \subseteq G$

وبما أن u مفتوحة . B قاعدة فإن

$\Leftarrow u =$ تساوي اجتماعاً لعناصر من B

$\Leftarrow$ فإن X ستنتمي حتماً لأحد عناصر هذا الاجتماع

$\Leftarrow$ أي جوار للنقطة x يحوي أحد عناصر G في جماعة الأسرة $x \in \nabla$

$\Leftarrow$ وبالتالي الأسرة ∇ جملة أساسية لجوارات x

كفاية اللزوم

لنأخذ مجموعة مفتوحة كيفية G , وغير خالية ولنأخذ نقطة كيفية فيها

وحسب المبرهنة الأولى بما أن G مفتوحة $\Leftarrow G$ جوار لـ X

وبما أن الأسرة ∇ جملة أساسية لجوارات x

$\Leftarrow$ الجوار G يحوي أحد عناصر الأسرة ∇ ولتكن ∇_x نسبياً لـ X

$$\Leftarrow x \in \mathcal{V}_x \subseteq G$$

$$G = \cup\{x\} \subseteq \cup \mathcal{V}_x \subseteq G$$

$$\Rightarrow G = \cup \mathcal{V}_x$$

اذاً G اجتماع العناصر من ∇ ولكن $\mathcal{V}_x$ جزء في B $\Leftarrow$ وبالتالي

$G = \cup B \Leftarrow$ اذاً B قاعدة

مثال توضيحي

لنأخذ الفضاء الحقيقي R حسب τ الطبولوجيا ~~المألوفة~~ العادية

$\tau \supseteq B$ أسرة المجالات المفتوحة $\{x\}$

B هي قاعدة لـ τ وهي أسرة المجالات المفتوحة كلها

~~[crossed out]~~ $\tau \supseteq B$

اذاً في هذه الحالة هي أسرة المجالات المفتوحة التي تحوي x

أي جوار لـ x لا بد أن يحوي مجال مفتوح يحوي x

ملاحظة : سؤال دورة

لتكن $X = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, c\}$ و $A = \{a, b\}$

عين أضعف طبولوجيا على x بحيث تكون المجموعتان A , B مفتوحتين

الحل :

$$\tau\{X, \phi, A, B, \{b\}\}$$

(فوق X, ϕ: دوماً موجود؛ فوق A, B: ناتج الاجتماع؛ فوق $\{b\}$: ناتج التقاطع)

ملاحظة :

ليس من الضروري أن تشكل أي أسرة من المجموعات قاعدة لطبولوجيا ما على X.

مثال :

لو أخذنا $X=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,c\}$ و $A=\{a,b\}$

فإن الأسرة $H=\{X,\emptyset,A,B\}$

لا تشكل قاعدة لأي طبولوجيا على X لأن شرط التقاطع غير محقق

لأنه (بطريقة نقض الفرض)

لنفرض جدلاً أن H قاعدة لطبولوجيا ما على X ⇐ $H \subseteq \tau$ من جهة ثانية إذا أخذنا أي عنصر من τ يجب أن يساوي اجتماع لعناصر من H ونلاحظ أن أي اجتماع لعناصر من H هو عنصر من H

وهذا يعني $\tau \subset H$ (H تحوي τ) ⇐ ومنه يكون

$\tau = H$ هذا يعني أن H طبولوجيا وهذا غير صحيح وهذا تناقض

لأنه $A \cap B \not\subset H$

م4 ———————————

مبرهنة :

لتكن X مجموعة ما، β أسرة من ~~المجموعات~~ مجموعاتها الجزئية تحقق الشرطين التاليان

① X يساوي اجتماعاً لعناصر β

② من أجل أي $u,v \in \beta$ وأي عنصر $x \in u \cap v$ توجد مجموعة W من β بحيث $x \in W \subseteq u \cap v$

إن الأسرة τ المؤلفة من المجموعات التي كل منها يساوي اجتماع لعناصر من β تشكل طبولوجيا على X وتتميز بأنها الطبولوجيا الوحيدة التي قاعدتها β

البرهان

① $A \cap B = \bigcup_{x \in A \cap B} W_x$

② أن β يشكل قاعدة لـ τ من طريقة بنائها